ETUDE DES GRANDEURS EN RÉGIME SINUSOÏDAL

GÉNÉRALITÉS

Définitions

On appelle grandeur alternative sinusoïdale, une grandeur périodique dont la valeur instantanée est une fonction sinusoïdale du temps.

$u(t) = \hat{U}\, sint(\omega t+\Theta_u)=\hat{U}\sin\alpha$ avec $\alpha=\omega t+\Theta_u$

$u(t)$: tension instantanée en V
$\hat{U}$: tension maximale en V
α : phase instantanée en rad
ω : pulsation en rad.s^{-1}
Θ_u : phase à l'origine en rad

Propriétés

VALEUR MOYENNE: $\langle u \rangle = 0$ car c'est une fonction alternative.

VALEUR EFFICACE:

$u(t)=\hat{U}\sin(\omega t+\Theta_u)$ soit $u^2(t)=\hat{U}^2\sin^2(\omega t+\Theta_u)$ or $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ donc

$$u^2=\frac{\hat{U}^2}{2}-\frac{\hat{U}^{2\cdot}\cos(2\omega t+2\Theta_u)}{2}$$

la valeur moyenne de $\dfrac{\hat{U}^{2\cdot}\cos(2\omega t+2\Theta_u)}{2}=0$

$\langle u^2\rangle=\dfrac{\hat{U}^2}{2}$ $\quad U=\sqrt{\langle u^2\rangle}=\dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ $\quad u(t)=\hat{U}\sin(\omega t+\Theta_u)=U\sqrt{2}\sin(\omega t+\Theta_u)$

PERIODE

- La période temporelle T est telle que $u(t)=u(t+kT)=u$ avec k entier.
- La période angulaire vaut 2π : $\sin\alpha=\sin(\alpha+2.k.\pi)$

Nous obtenons donc:

$\hat{U}\sin(\omega t+\Theta_u)=\hat{U}\sin[\omega(t+kT)+\Theta_u]=\sin(\omega t+\Theta_u+2k\pi)$
soit $\omega(t+k.T)+\Theta_u=\omega t+\Theta_u+2.k.\pi\Rightarrow\omega T=2\pi$

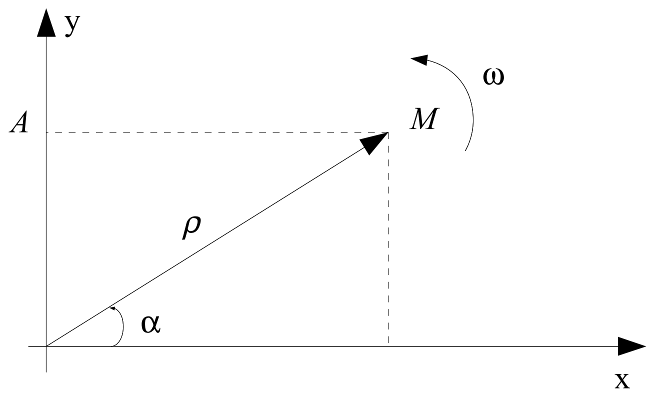
ω : en rad.s^{-1} et T en s.

$f=\frac{1}{T}\Rightarrow\omega=2\pi f$ la fréquence f est en Hz

Représentation de FRESNEL

1.3.1. Vecteur tournant

A toute fonction sinusoïdale du temps, on peut associer un vecteur tournant autour de son origine à la vitesse angulaire ω
α est fonction du temps: $\alpha=\omega t+\Theta$ Θ étant l'angle ($\vec{Ox}, \vec{OM}$) à t = 0



$\overline{OA} = \overline{OM}\sin\alpha=\rho\sin\alpha$ ρ : module de $\overline{OM}$
$\overline{OA}=\rho\sin(\omega t+\Theta)$ est une fonction sinusoïdale du temps.

1.3.2. Vecteur de Fresnel

A toute fonction sinusoïdale du temps, on peut donc associer un vecteur. Les grandeurs qui caractérisent une tension:

$$u(t)=U\sqrt{2}\sin(\omega t+\Theta_u)$$

U: tension efficace en V
Θ_u : phase à l'origine des temps de *u* en rad.

Ces deux grandeurs permettent de définir le vecteur associé $\vec{U}$

Définition: A la tension sinusoïdale *u*(*t*), on associe un vecteur de Fresnel $\vec{U}$ dont le module est la valeur efficace *U*, faisant l'angle Θ_u avec un axe de référence des phases. *U* et Θ_u sont les coordonnées polaires de $\vec{U}$

Exercices d'application:

$u_1(t)=2\sqrt{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})$ $\vec{U}_1=module\,2, angle(\vec{Ox},\vec{u_1})=\frac{\pi}{4}$

$u_2(t)=3\sqrt{2}\sin(\omega t-\frac{\pi}{6})$ $\vec{U}_2=module\,3, angle(\vec{Ox},\vec{u_2})=-\frac{\pi}{6}$

ETUDE DES CIRCUITS LINÉAIRES

Fréquence

Soit un circuit ne comportant que des éléments linéaires. Ce circuit étant alimenté par une tension sinusoïdale *u* de fréquence *f*, tous les courants et toutes les tensions de ce circuit ont la même fréquence *f* . La représentation de Fresnel n'est utilisable que pour ce type de circuit.

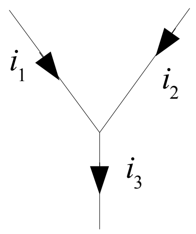
Loi des nœuds et loi des mailles

2.1. Principe

La loi des nœuds et la loi des mailles établies en courant continu s'appliquent directement aux valeurs instantanées. Dans le cas des circuits linéaires, on pourra les appliquer, en régime sinusoïdal, à l'une ou l'autre des représentations suivantes:

- valeurs instantanées
- vecteur de Fresnel associés;
- nombres complexes associés.

2.2. exemple



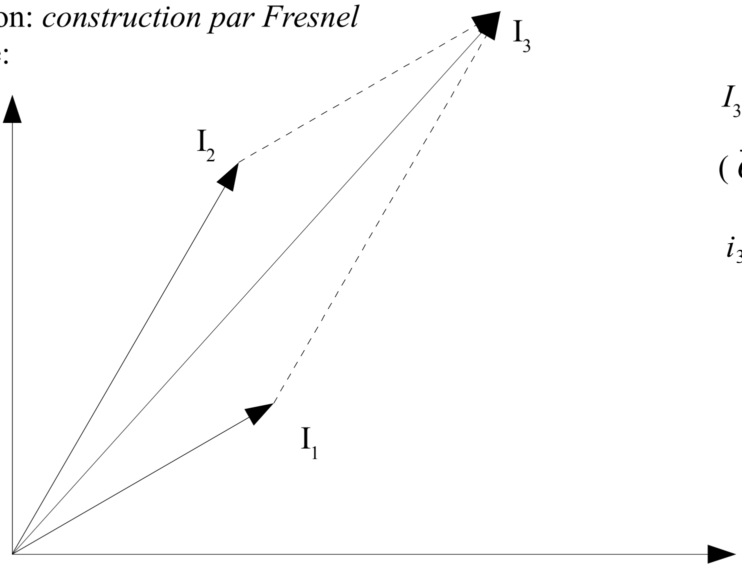
$$i_1 = 4\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$$
$$i_2 = 6\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$$

Calculer i_3

$i_3 = i_1 + i_2 \Rightarrow \vec{I_3} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$ $\quad$ $i_1 \rightarrow \vec{I_1} = [4 ; \frac{\pi}{6}]$ $\quad$ $i_2 \rightarrow \vec{I_2} = [6 ; \frac{\pi}{3}]$

1[ère] solution: *construction point par point*
On représente les variations i_1 et i_2 en fonction du temps, et on fait la somme point par point pour obtenir i_3 . La méthode est longue pour un résultat précis.

2[ème] solution: *construction par Fresnel*
A l'échelle:



$I_3 = 9{,}6$ A

$(\overrightarrow{Ox}\ ,\ \overrightarrow{I_3}) = 48° = 0{,}84$ rad

$i_3 = 9{,}6\sqrt{2}\sin(100\pi t + 0{,}84)$

2.3. <u>Différence de phase</u>

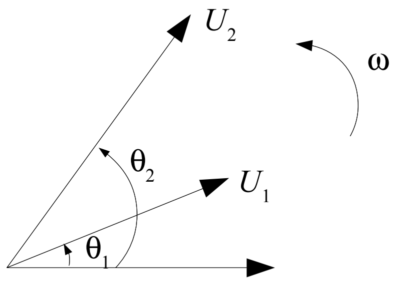
2.3.1. Présentation

Lorsqu'on observe simultanément sur l'écran d'un oscilloscope, deux tensions prélevées sur un même circuit, on constate le plus souvent qu'elles sont décalées l'une par rapport à l'autre dans le temps. On dit qu'il existe une différence de phase entre ces tensions.

2.3.2. Définition

Soit deux tensions de même fréquence, d'équations:

$$u_1(t) = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \Theta_1)$$
$$u_2(t) = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \Theta_2)$$



que l'on représente par des vecteurs tournants:

$\overrightarrow{U_1} = [U_1, \Theta_1]$ et $\overrightarrow{U_2} = [U_2, \Theta_2]$

Les vecteurs, tournant à la même vitesse angulaire ω , sont immobiles l'un par rapport à l'autre: l'angle ($\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$) reste donc constant. On l'appelle différence de phase entre u_1 et u_2 et on le note : ($\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$) = φ_{u_2/u_1} = Θ_2 - Θ_1

2.3.3. Décalage horaire

A la différence de phase φ en radians, on associe le décalage horaire τ , exprimée en secondes.

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\tau}{\varphi} \Rightarrow \frac{\varphi_{u_2/u_1}}{\omega} = \frac{\varphi_{u_2/u_1}}{\frac{2\pi}{T}} \Rightarrow \varphi_{u_2/u_1} = \frac{2\pi\tau}{T} = 2\pi\tau f$$

2.3.4. Notions d'avance et de retard.

Si $\varphi_{u_2/u_1}=\Theta_2-\Theta_1>0$ u_2 est en avance sur u_1 (u_1 est en retard sur u_2)
Si $\varphi_{u_2/u_1}=\Theta_2-\Theta_1<0$ u_2 est en retard sur u_1 (u_1 est en avance sur u_2)

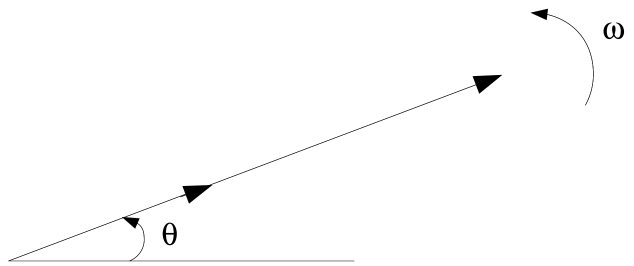
2.3.5. Valeurs particulières de la différence de phase

Considérons deux tensions sinusoïdales d'équations:

$$u_1(t)=U_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\Theta_1)$$
$$u_2(t)=U_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\Theta_2)$$

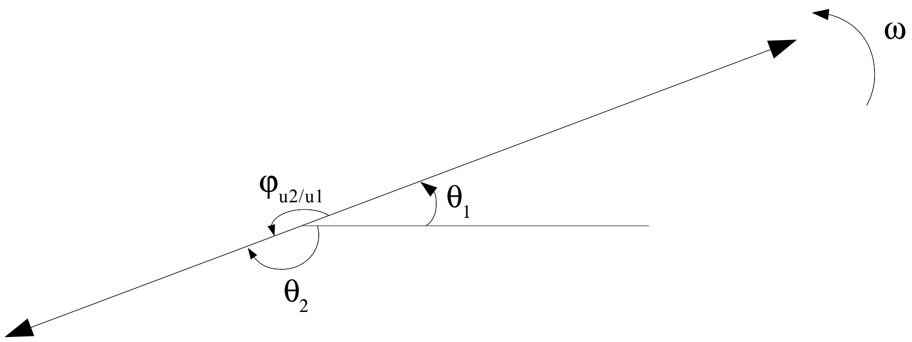
<ins>a. Tensions en phase</ins>

$\Theta=\Theta_1=\Theta_2$
$\varphi_{u_2/u_1}=\Theta_2-\Theta_1=0$
$\tau=0$



<ins>b. Tensions en opposition de phase</ins>

$\varphi_{u_2/u_1}=\Theta_2-\Theta_1=\pi$
$\tau=\dfrac{T}{2}$



c. <ins>Tensions en quadrature de phase</ins>

$\varphi_{u_2/u_1}=\Theta_2-\Theta_1=\dfrac{\pi}{2}$
$\tau=\dfrac{T}{4}$